**信号与系统讲义**

目录

[1. 信号与系统的基本概念(信号，系统) 2](#_Toc157442964)

[1.1. 信号(表现形式：函数，数列，矩阵等) 2](#_Toc157442965)

[1.2. 系统 3](#_Toc157442966)

[2. 信号与系统基本概念(卷积，LTI系统)单位脉冲响应、卷积的定义及matlab中的应用 5](#_Toc157442967)

[2.1. LTI（Linear Time Invariant）系统与卷积和 5](#_Toc157442968)

[2.2. 基于卷积的概念重新认识系统的稳定性与因果性 7](#_Toc157442969)

[2.3. Matlab计算卷积的函数举例 8](#_Toc157442970)

[3. 周期信号与采样 9](#_Toc157442971)

[3.1. 连续时间周期信号 9](#_Toc157442972)

[3.2. 离散时间周期信号 9](#_Toc157442973)

[3.3. 常见的周期信号：正弦信号（离散时和连续时） 9](#_Toc157442974)

[4. 指数信号与正弦信号 11](#_Toc157442975)

[4.1. 连续时间信号 11](#_Toc157442976)

[4.2. 离散时间信号 11](#_Toc157442977)

[4.3. 采样，奈奎斯特采样定理，周期延拓 13](#_Toc157442978)

[5. 离散时间周期信号的傅里叶展开 14](#_Toc157442979)

[5.1. LTI系统对复指数信号的响应 14](#_Toc157442980)

[5.2. 离散周期信号的傅里叶级数展开 14](#_Toc157442981)

[5.3. 两种方法计算傅里叶级数中的系数 15](#_Toc157442982)

[5.4. 非周期信号的离散时间傅里叶变换（DTFT） 17](#_Toc157442983)

[5.5. 离散时间傅里叶变换（DTFT）性质 19](#_Toc157442984)

[5.6. 离散傅里叶变换（DFT） 20](#_Toc157442985)

[5.7. 离散傅里叶变换（DFT）性质 21](#_Toc157442986)

[6. 滤波 24](#_Toc157442987)

[6.1. 线性时不变系统的频域响应 24](#_Toc157442988)

[6.2. 滤波器的本质：改变输入信号的相位与幅度 25](#_Toc157442989)

[6.3. 理想滤波器 26](#_Toc157442990)

[6.4. IIR，FIR滤波器 27](#_Toc157442991)

[6.5. 低通滤波器的设计示例 29](#_Toc157442992)

# 信号与系统的基本概念(信号，系统)

## 信号(表现形式：函数，数列，矩阵等)

* + 1. 连续时间信号

*x*(*t*)：自变量连续可变，信号在自变量的连续值上都有定义。

* + 1. 离散时间信号（数字信号）

*x*(*n*)：自变量仅取在一组离散的值上；物理世界中的信号都是连续信号，只是我们在离散的点进行采样记录；离散时间信号适合计算机进行处理。

e.g.1. 脑电信号的采样率: 多久进行一次采样（即时隔多久进行一次信号记录）；若*fs*（采样率） = 1000 Hz，代表每隔1/1000 s 进行一次脑电信号的记录

e.g.2. Matlab中绘制离散信号的函数：

plot(data)

stem(data)

sound(data, fs) %语音信号播放，fs代表语音信号的采样率

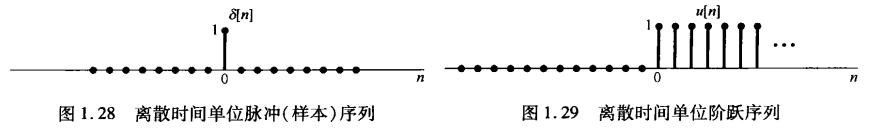
* + 1. 脉冲信号与阶跃信号

脉冲信号（impulse）：*δ*(*n*)



阶跃信号（step）：*u*(*n*)



脉冲信号与阶跃信号的关系：



* + 1. 信号变形

*x*(*n* + 1)：*x*(*n*)向左移动一个采样点

*x*(*n -* 1)：*x*(*n*)向右移动一个采样点

*ak x*(*n* - *k*)：*x*(*n*)向右移动*k*个采样点，且每个采样点乘*ak*；在实际生活中，*k*代表潜伏期或延迟，*ak*代表幅度。

任意信号都可以用脉冲信号进行表示：(这里要加一个示意图)



## 系统

* + 1. 系统：用来描述输入*x*(*n*)与输出信号*y*(*n*)之间的关系。一个系统可以看成是一个过程，在其中，输入信号被该系统所变换，或者说，系统以某种方式对输入信号进行响应。系统的表达方式：

*x*(*n*) → *y*(*n*)

* + 1. 系统的性质：

a). 线性（满足齐次性与可加性），

对于如式xx所示系统，齐次性需满足：

*a x*(*n*) → *a y*(*n*)

可加性需满足：

*x*1(*n*) → *y*1(*n*);

*x*2(*n*) → *y*2(*n*);

*x*1(*n*) + *x*2(*n*) → *y*1(*n*) + *y*2(*n*)

那么一个线性系统需要满足：

*a x*1(*n*)+*b x*2(*n*) → *a y*1(*n*)+*b y*2(*n*)

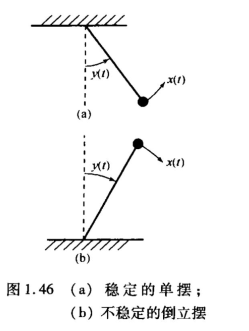
人也是一个系统，但不是线性的。线性很难满足

b). 时不变性：（一个时不变系统对于移位单位脉冲【即：*δ*(*n* - *k*)】的响应就是未被移位的单位脉冲响应的移位*δ*(*n*) → *h*(*n*)，*δ*(*n* - *k*) → *h*(*n* - *k*)）

*x*(*n - k*) → *y*(*n - k*)

c). 因果性：系统在任何时刻的输出仅取决于当前时刻输入及当前时刻之前的输入。

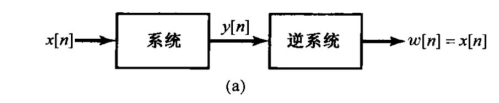
d). 稳定性：一个稳定系统，如果输入是有界的，那么系统的输出必须是有界的（单摆系统）（直观上看，一个稳定系统在小的输入的情况下，输出是不会发散的）



e.g.1. 系统是否稳定的判定方法

e.g.2. *y*(*n*) = *n* *x*(*n*)

e). 可逆性：一个系统在不同的输入下有不同的输出



# 信号与系统基本概念(卷积，LTI系统)单位脉冲响应、卷积的定义及matlab中的应用

## LTI（Linear Time Invariant）系统与卷积和

* + 1. 什么是LTI系统

对于离散时间信号而言，任何一个离散信号都可以由离散单位脉冲信号进行表示：



*x*(*n*) 被表示成一组**加权**的基本函数的叠加，这个基本函数就是*δ*(*n* – *k*);

*y*(*n*)：系统对于*x*(*n*)的响应，即 *x*(*n*) → *y*(*n*);

*h*-1(*n*), *h*0(*n*), *h*1(*n*), *hk*(*n*)：系统分别对于*δ*(*n* + 1), *δ*(*n*), *δ*(*n* - 1), *δ*(*n* - *k*)的响应。

* + - 1. 线性

一个系统如果为一个**线性系统**（这里仅讨论线性系统，可能为时变系统也可能为非时变系统），需同时满足齐次性和可加性（叠加性），下面以*x*(*n*)作为系统的输入信号为例，来探究当系统分别满足齐次性和可加性的情况下，系统的输出信号。

1. 齐次性

根据式，将输入信号*x*(*n*)分解为脉冲信号的线性加权和，对于每一个脉冲信号，都可以得到如下式所示的系统的输出：



1. 可加性（叠加性）

将式中所有部分叠加，得到如下所示的结果：



式可进一步表示为：



那么，对于该**线性系统**（这里仅讨论线性系统，可能为时变系统也可能为非时变系统）而言，根据式(1.4)，系统输入为*x*(*n*)，输出*y*(*n*)即为：



注：上式的*hk*(*n*)带有下角标*k*。

* + - 1. 时不变性

一个系统如果为**时不变系统**，系统需要满足当输入的信号产生时移时，系统的输出信号也会产生相同的时移，如果系统对于*δ*(*n*)的响应为*h*(*n*)，那么系统对于*δ*(*n* - *k*)的响应*hk*(*n*)可以被写作*h*(*n* - *k*)。

综上，对于一个**同时满足线性和时不变性的系统**（即为**线性时不变系统**，也称为**LTI系统**），那么式可以被写作：



上述公式即为卷积和，等号右边的运算也称为*x*(*n*)和*y*(*n*)的**卷积**，符号表示为：



* + 1. LTI系统的基本表现形式
       1. 差分方程



* + - 1. 单位脉冲响应



*h*(*n*)为系统输入单位脉冲后系统的输出，被称为系统的**单位脉冲响应**，用于描述LTI系统的特性，所以*h*(*n*)也被称为**系统函数**。此外，若已知LTI系统的输入为*x*(*n*)，LTI系统的系统函数为*h*(*n*)，*x*(*n*)和*h*(*n*)进行卷积后得到的结果即为系统的输出，即：。

## 基于卷积的概念重新认识系统的稳定性与因果性

* + 1. 因果性

系统的因果性：一个因果系统的输出只取决于现在和过去的输入值。对于离散的LTI系统，若系统为因果的，那么系统输出*y*(*n*)就必须与*k* > *n*时系统的输入*x*(*k*)无关，对应到式中，需要保证当*k > n*时，*h*(*n* - *k*) = 0，即：



因此，一个因果LTI系统的单位脉冲响应在单位脉冲出现之前必须为0。对于一个因果的LTI系统而言，式的条件意味着其卷积和的表现形式可以变为：



而另外一种等效的形式为：



综上，若LTI系统的单位脉冲响应满足*h*(*n*) = 0，*n* < 0，则该系统为因果系统。因果的LTI系统可以由式或进行表示。

* + 1. 稳定性

系统的稳定性：对于每一个有界的输入，系统的输出都是有界的。对于一个LTI系统，若系统输入*x*(*n*)有界，即



在系统输入有界，即式作为约束的情况下，系统的输出为：



因此，若，即**LTI系统的单位脉冲响应绝对可和**，那么系统输出也有界，该LTI系统为稳定系统。

## Matlab计算卷积的函数举例

一些可以用来在matlab中做卷积的函数：

* cov
* conv
* filter

# 周期信号与采样

## 连续时间周期信号

对于一个连续时间信号*x*(*t*)，如果存在一个正值*T*，对于任何一个时间点*t*，该连续时间信号都具有式所示的性质，*x*(*t*)即为连续周期信号，周期为*T*。



此外，若*x*(*t*) 为周期信号，且周期为*T*，那么对于所有的*t*和正整数*m*，都有*x*(*t*) = *x*(*t* + *mT*), 由此可得，*x*(*t*)的周期也可以为2*T*，3*T*，…等。使式成立的最小正值*T*称为*x*(*t*)的**基波周期**。

## 离散时间周期信号

同样的，对于离散时间信号*x*(*n*), 若存在一个**最小正值*N***，对于任何的离散点*n*均满足*x*(*n*) = *x*(*n* + *N*)，那么*x*(*n*)即为离散时间周期信号，*N*为基波周期。

## 常见的周期信号：正弦信号（离散时和连续时）

正弦信号是一种常见的周期信号，对于连续正弦信号：*x*(*t*) = *A* sin(*ω0 t* + *Φ*)，其中，*A*代表振幅，*ω0*代表该正弦信号的频率，*Φ*代表相位，正弦信号周期*T* = 2*kπ*/*ω0* ，*k*为正整数。

进一步的，对连续正弦信号进行采样，可以得到离散正弦信号：*x*(*n*) = *A* sin(*ω0 n* + *Φ*)，*A*，*ω0*和*Φ*的定义同前文一致，由于离散正弦信号的采样点均为离散的点，其周期*N*也需为正整数，具体的对于该离散正弦信号周期性的讨论见下文。

1. 连续正弦信号*x*(*t*) = *A*sin(*ω0 t* + *Φ*) **周期*T***的计算方法：

根据周期信号的性质：*x*(*t*) = *x*(*t* + *T*)，

那么，对于该正弦信号而言：*A* sin(*ω0 t* + *Φ*) = *A* sin(*ω0 t* + *ω0 T* + *Φ*)，

要保证上式成立，*ω0 T = 2kπ*，*T* = 2*kπ*/*ω0*，*k* = 1, 2, …，*T*为基波周期。

1. 同理，对于离散正弦信号*x*(*n*) = *A*sin(*ω0 n* + *Φ*)，**周期*N***的计算方法：

*x*(*n*) = *x*(*n* + *N*)，

*A* sin(*ω0 n* + *Φ*) = *A* sin(*ω0 n* + *ω0 N* + *Φ*)，

*N* = 2*kπ*/*ω0*

对于该离散正弦信号*x*(*n*) = *A* sin(*ω0 n* + *Φ*)，要满足信号的周期性，周期***N***需为正整数，分为以下三种情况进行讨论：

1. 若2*π*/*ω0*为整数，该离散正弦信号具有周期性，周期*N* = 2*kπ*/*ω0*，*k* = 1, 2, … , **基波周期：2*π*/*ω0***。
2. 若2*π*/*ω0*为有理数，该离散正弦信号具有周期性，周期*N* = 2*kπ*/*ω0*，*k* 为整数（能够保证*N*为整数），基波周期：2*kπ*/*ω0*，*k*为使*N*为整数的最小整数。
3. 若2*π*/*ω0*为无理数，不存在正整数*N*满足*x*(*n*) = *x*(*n* + *N*)，该离散正弦信号不具有周期性。

此外，对于一个给定的周期*N*，则有*N*个可能以*N*为周期的离散正弦信号，这*N*个正弦信号对应的频率*ω0*为：



除此之外，通过对连续时间正弦信号进行采样，来得到离散时间正弦信号，需满足**奈奎斯特采样定理，即采样频率*fs*应至少大于正弦信号最高频率的两倍，才能保证正弦信号不发生失真。**

# 指数信号与正弦信号

## 连续时间信号

* + 1. 连续指数信号

连续时间指数信号具有如下形式：



若*C*和*a*均为实数，*x*(*t*)为**实指数信号**，若*a*>0，*x*(*t*)随*t*的增加呈指数增长；若*a*<0，*x*(*t*)随*t*的增加呈指数衰减。

若式中*C*和*a*为复数，*x*(*t*)为**复指数信号**，当*C* = 1，且*a*为纯虚数时，即*a* = *jω0*，该复指数信号为：



该信号也为周期信号，在4.1.2节中进行讨论。

* + 1. 复指数信号与正弦信号的关系

根据**欧拉公式：**



式所示的复指数信号可以用具有相同基波周期*T0* = 2*π*/*ω0*的正弦信号来进行表示，所以也为周期信号。此外，根据欧拉公式，也可以得到基于复指数信号的正弦和余弦信号的表示方法：



## 离散时间信号

* + 1. 离散指数信号

同连续指数信号一致，离散指数信号定义为：



当*C*，*α*或者*β*均为实数时，为实指数信号，否则，为复指数信号。若*C* = 1，且限制为*β*纯虚数，即*β* = *jω0*，即可得到与式类似的**离散复指数信号**：



* + 1. 离散复指数信号（一般信号与周期信号）与正弦信号的关系

限制*β*为纯虚数时，式所示的复指数信号为周期信号，根据欧拉公式，*x*(*n*)可以进一步表示为：



当*C*和*α*均为复数时，式所示的信号为**一般复指数信号**，该种情况下，*C*和*α*可以以极坐标的形式表示：





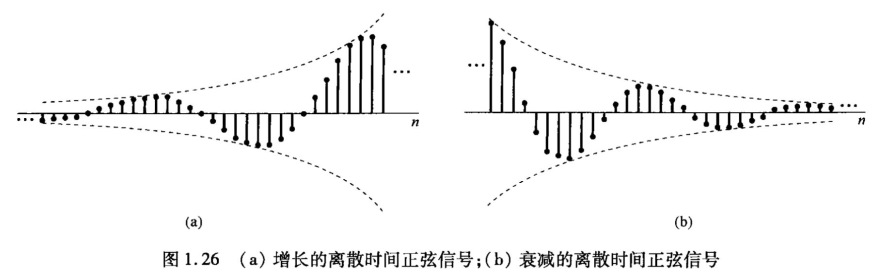
进一步的，复指数信号可以被表示为：



根据欧拉公式，可以表示为：



因此，一般复指数信号可以表示为实指数信号和正弦信号的组合，当|*α*|=1，*x*(*n*)的实部和虚部均为正弦信号；当|*α*| > 1时，复指数信号的实部和虚部为呈指数增长的序列，当|*α*| < 1时，则为呈指数衰减的序列。



## 采样，奈奎斯特采样定理，周期延拓

连续信号采样可以得到离散信号，以正弦信号为例，已知连续正弦信号为  
*x*(*t*) = sin(Ω*t*)，对该连续信号进行时间间隔为*Ts*的采样，可以得到离散正弦信号：



其中，Ω代表模拟角频率，*ω*代表数字角频率，*Ts*代表采样周期，采样频率*fs* = 1/*Ts*。其中模拟角频率与数字角频率的对应关系为：



下面从另外一个角度理解采样：

脉冲信号为*δ*(*t*)，对脉冲信号进行*nTs*的移位，组成一个脉冲序列（上述过程也称为以*Ts*为周期的周期延拓），连续信号与冲激序列相乘，连续信号中位于*nT*s时间点处的信号被保留下来，这样就得到了连续信号采样后的离散信号。

特别的，在时域对连续信号以*Ts*进行采样，变换到频域，离散信号的频谱相当于连续信号的频谱以*fs*为周期进行周期延拓，所以离散信号的频谱是一个以*fs*（2*π，*当模拟角频率Ω*=*2*πfs*时，数字角频率*ω=*2*π*）为周期的连续周期信号。为了保证离散信号的频谱不发生频谱混叠，**采样频率*fs*应大于等于连续信号最高频率*fs*的2倍，该定理也被称为奈奎斯特采样定理**。信号最低采样频率*fs* = 2*fs*也被称为奈奎斯特频率。

# 离散时间周期信号的傅里叶展开

在研究线性时不变系统时，将信号表示成基本信号的线性组合是很有利的，但这些基本信号应该具有以下两个性质：

* + 性质1：由这些基本信号能够构成相当广泛的一类有用信号；
  + 性质2：线性时不变系统对每一个基本信号的响应应该十分简单，以使系统对任意输入信号的响应有一个很方便的表示式。

该基本信号即为**复指数信号！**

## LTI系统对复指数信号的响应

如果一个线性时不变系统的输入能够表示成复指数的线性组合，那么系统的输出也能够表示成相同的复指数信号的线性组合。

## 离散周期信号的傅里叶级数展开

【上述性质一】这里先从复指数信号可以线性组合成任意一种周期序列，引出傅里叶级数的概念。

任意一种周期信号是否能够由多种复指数信号进行线性组合得到呢？对于一个以*N*为周期的周期序列*x*(*n*)，如果其能够被周期为*N/k*的复指数信号进行线性组合得到，则可以表示如下：



其中，由于*x*(*n*)为周期为*N*的离散周期序列，*k*的取值可以是任意*N*个相继的整数。即可以取*k* = 0，1，2，…，*N*-1，或者*k* = 1，2，3，…，*N* (后文的讨论中以*k* = 0，1，2，…，*N*-1为例)。

判断周期序列是否能被一组复指数信号进行表示，等价于判断是否存在*N*个*ak*，能够使得式成立，若存在，**式称为周期序列的离散时间傅里叶级数**，系数*ak*则称为**傅里叶级数系数。**

**离散时间周期信号的傅里叶级数**

**Discrete Time Fourier Series**

**离散时间有限长的傅里叶变换**

**Discrete Foufier Transform**

## 两种方法计算傅里叶级数中的系数

上述5.2得到什么是傅里叶级数，这一环节主要计算傅里叶级数中的系数。

* + 1. 傅里叶级数求解

式可以进行如下所示的变形：



其中，



所以式可以进一步简化为：

只有当*k* = *r*时，等号右侧可以简化为*arN*，因此可以得出*ar*的计算式：



式的证明见下文，

可以看作等比数列求和的形式：

当*k* = *r*时，等比数列各项始终为1，所以

当*k ≠ r*时，等比数列公比，*k*与*r*均为整数，初项*a*0 =1，所以，根据等比数列求和公式：得出：



* + 1. 傅里叶级数系数的矩阵求解

对于式，当*n*分别取0，1，…，*N*-1时，另，*x*(*n*)可以表示如下：



将上述整合为矩阵形式进行求解：





那么



根据可得（***E***为单位矩阵）：





所以可得：



因此，对于任意一个周期为*N*（频率为2*π*/*N*）的离散时间信号，都可以表示称为不同频率的复指数序列之和的形式，且这些复指数序列的频率为该周期序列基频2*π*/*N*的整数倍。

## 非周期信号的离散时间傅里叶变换（DTFT）

5.2小节介绍了周期信号可以通过傅里叶级数展开将其变为若干个不同频率的复指数信号的线性组合，相当于可以将周期信号由时域变化为频域，那对于一个离散的非周期信号，是否可以表示为若干个复指数信号的线性组合形式呢？

设序列*x*(*n*)为长度为*N*的离散信号，即在0 ≤ *n* ≤ *N*-1范围之外，*x*(*n*) = 0，对于该信号，如果以*N*进行周期延拓，可以得到一个离散周期信号 ，其中*x*(*n*)为的主值序列，或者说*x*(*n*)是的一个周期。对于周期信号，可以进行离散傅里叶级数展开：



因为在0 ≤ *n* ≤ *N*-1范围内，*x*(*n*) = 所以，傅里叶级数的系数*ak*可以进一步改写为：



现在定义函数：



那么：



将式代入式，可得：



当*N*趋近于∞时，*x*(*n*) = ，上式求和形式进一步转化为积分的形式：



式xx表明，对于非周期离散信号，可以写成无数个复指数信号之和的形式，所以定义式为离散时间傅里叶变化（DTFT），式为离散时间傅里叶逆变化，也表明非周期离散信号的频谱是周期为2*π*的连续信号。

即：





特别说明一点，并不是对于所有的非周期离散时间信号都存在离散时间傅里叶变换，序列*x*(*n*)的傅里叶变换存在的充要条件为序列*x*(*n*)绝对可和，即满足：



## 离散时间傅里叶变换（DTFT）性质

若已知离散信号*x*(*n*)，*y*(*n*)及其离散时间傅里叶变化*X*(*ejω*)及 *Y*(*ejω*)，离散时间傅里叶变换存在以下性质

1）线性：



2）时移特性：



3）线性卷积特性：



其中\*代表线性卷积运算。线性卷积特性表明两个信号时域的卷积相当于频域的相乘，这一性质为后续分析LTI系统频域特性提供了思路。

4）频域卷积特性：



频域卷积特性表明两个信号频域的卷积相当于时域的相乘。

更多对于DTFT性质的讨论详见《信号与系统》。

STFT Short Time Frourier Transform 短时傅里叶变换（也可以叫小波变换）

## ~~离散傅里叶变换（DFT）~~

~~对离散时间信号进行DTFT得到的信号的频谱是连续信号，是否存在能够得到信号的离散化频谱的方法？周期序列的傅里叶级数展开(5.2节)提供了一种计算离散频率点上的序列频谱的公式，但是现实生活中大多数信号为具有有限持续时间的离散时间信号。设有限长信号为~~*~~x~~*~~(~~*~~n~~*~~)，如果以~~*~~N~~*~~为周期，对~~*~~x~~*~~(~~*~~n~~*~~)进行周期延拓，可以得到一个周期为~~*~~N~~*~~的序列 ，该序列可以进行离散傅里叶级数展开，得到的离散傅里叶级数所对应的系数也为周期为~~*~~N~~*~~的序列。~~*~~x~~*~~(~~*~~n~~*~~)为 的主值序列。傅里叶级数序列也存在一个主值序列，取该主值序列作为~~*~~x~~*~~(~~*~~n~~*~~)的离散化后频谱，这样的变换称为离散傅里叶变换（discrete Fourier transform，DFT）。对于任意一个有限长序列，都可以进行上述离散傅里叶变化的计算。下面对DFT进行定义：~~

~~设~~*~~x~~*~~(~~*~~n~~*~~)为长度为~~*~~N~~*~~的有限长序列，是~~*~~x~~*~~(~~*~~n~~*~~)以~~*~~N~~*~~为周期进行周期延拓得到的序列,定义的傅里叶变换为：~~

~~~~

~~式的求和区间为周期序列的主值区间（0 ≤~~ *~~n~~* ~~≤~~ *~~N~~*~~-1），所以：~~

~~~~

~~为周期为~~*~~N~~*~~的序列，取 的主值序列~~*~~X~~*~~(~~*~~k~~*~~)作为~~*~~x~~*~~(~~*~~n~~*~~)的离散傅里叶变换，即：~~

~~~~

~~离散傅里叶逆变化为：~~

~~~~

~~特别的，傅里叶级数介绍中引入的（即式）为DFT的变换矩阵。~~

~~对信号进行DFT变换得到的，DFT存在快速算法FFT(fast Fourier transform)，matlab中DFT的计算函数为fft()，fft(~~*~~x~~*~~,~~ *~~N~~*~~)使用时需要输入两个参数，其中~~*~~x~~*~~为需要进行DFT的离散时间信号，N为进行DFT的点数，若~~*~~N~~*~~大于~~*~~x~~*~~的长度时，会自动对~~*~~x~~*~~进行补零，如果~~*~~N~~*~~小于~~*~~x~~*~~的长度，会按照~~*~~N~~*~~的大小对~~*~~x~~*~~进行截断，缺省时~~*~~N~~*~~为~~*~~x~~*~~的长度。~~

## ~~离散傅里叶变换（DFT）性质~~

1. ~~线性:~~

~~设~~*~~x~~*~~(~~*~~n~~*~~)和~~*~~y~~*~~(~~*~~n~~*~~)都是长度为~~*~~N~~*~~的有限长序列，它们各自的DFT分别为~~*~~X~~*~~(~~*~~k~~*~~)和~~*~~Y~~*~~(~~*~~k~~*~~)，则：~~

~~~~

~~式中~~*~~a~~*~~，~~*~~b~~*~~均为常数，傅里叶变换同时满足齐次性与可加性，所以傅里叶变换是一种线性运算。~~

1. ~~循环移位定理~~

~~1）时域循环移位定理~~

~~设~~*~~x~~*~~(~~*~~n~~*~~)为长度为~~*~~N~~*~~的有限长序列，序列~~*~~x~~*~~(~~*~~n~~*~~)进行循环移位时，需先以周期~~*~~N~~*~~对~~*~~x~~*~~(~~*~~n~~*~~)进行周期延拓得到 ，然后对 进行移位，取移位后序列的主值区间（0 ≤~~ *~~n~~* ~~≤~~ *~~N~~*~~-1）作为序列~~*~~x~~*~~(~~*~~n~~*~~)循环移位后的结果。~~

~~循环移位定理为：序列~~*~~x~~*~~(~~*~~n~~*~~)向右进行~~*~~n~~*~~0~~~~个采样点的循环移位，那么循环移位后的序列~~*~~x~~*~~(~~*~~n~~*~~-~~*~~n~~*~~0~~~~)傅里叶变换为：~~

~~~~

~~若序列~~*~~x~~*~~(~~*~~n~~*~~)向左进行~~*~~n~~*~~0~~~~个采样点的循环移位，那么循环移位后的序列~~*~~x~~*~~(~~*~~n~~*~~+~~*~~n~~*~~0~~~~)傅里叶变换为：~~

~~~~

~~2）频域循环移位定理~~

~~若：~~

~~~~

~~对~~*~~X~~*~~(~~*~~k~~*~~)进行~~*~~k~~~~0~~*~~个采样点的向右循环移位，得到~~*~~X~~*~~(~~*~~k~~* ~~-~~ *~~k~~*~~0~~~~)，那么：~~

~~~~

~~同理，若对~~*~~X~~*~~(~~*~~k~~*~~)进行向左循环移位，那么：~~

~~~~

1. ~~时域循环卷积定理~~

~~设长度为~~*~~N~~*~~1~~~~和~~*~~N~~*~~2~~~~的两个有限长序列为~~*~~x~~*~~(~~*~~n~~*~~)和~~*~~y~~*~~(~~*~~n~~*~~)，取N ≥ max(~~*~~N~~*~~1~~~~,~~ *~~N~~*~~2~~~~)，~~*~~x~~*~~(~~*~~n~~*~~)和~~*~~y~~*~~(~~*~~n~~*~~)的~~*~~N~~*~~点DFT分别为：~~

~~~~

~~如果：~~

~~~~

~~则：~~

~~~~

~~其中，代表循环卷积运算，简单一点描述时域循环卷积定理为：两个信号时域的卷积对应频域的相乘。循环卷积运算过程见下文。~~

**循环卷积运算：**

若循环卷积点数为*L*，需要先将卷积的两个信号末端补零到长度为*L*，然后对其中一个信号以*L*为周期进行周期延拓，然后进行线性卷积的运算。求和范围为0 ~ *L*-1

~~基于时域循环卷积定理，可以利用DFT对序列的线性卷积进行快速运算。设两个离散时间信号~~*~~x~~*~~(~~*~~n~~*~~)，~~*~~y~~*~~(~~*~~n~~*~~)的长度分别为~~*~~N~~*~~和~~*~~M~~*~~，线性卷积与循环卷积存在一些对应关系，当循环卷积点数~~*~~L~~* ~~≥~~ *~~N~~*~~+~~*~~M~~*~~-1时，循环卷积等于线性卷积，基于上述关系，若计算~~*~~x~~*~~(~~*~~n~~*~~)与~~*~~y~~*~~(~~*~~n~~*~~)的线性卷积时，可以先将~~*~~x~~*~~(~~*~~n~~*~~)进行至少~~*~~M~~*~~-1个点的末端补零，~~*~~y~~*~~(~~*~~n~~*~~)进行至少~~*~~N~~*~~-1个点的末端补零，然后分别计算~~*~~x~~*~~(~~*~~n~~*~~)与~~*~~y~~*~~(~~*~~n~~*~~)的DFT结果~~*~~X~~*~~(~~*~~k~~*~~)，~~*~~Y~~*~~(~~*~~k~~*~~)，对~~*~~X~~*~~(~~*~~k~~*~~)与~~*~~Y~~*~~(~~*~~k~~*~~)的乘积进行IDFT，即可得到~~*~~x~~*~~(~~*~~n~~*~~)与~~*~~y~~*~~(~~*~~n~~*~~)的线性卷积的结果。~~

~~更多对于DFT性质的讨论详见《信号与系统》。~~

# 滤波

## 线性时不变系统的频域响应

根据2.1.2章节的内容，对于一个LTI系统而言，系统输入为*x*(*n*)，系统的单位脉冲相应为*h*(*n*)，那么系统的输出*y*(*n*) = *x*(*n*) \* *y*(*n*)，根据DTFT的线性卷积定理，上式可以变化到频域：



其中，，分别代表*x*(*n*)，*y*(*n*)，和*h*(*n*)的DTFT。其中被称为LTI系统的频率响应，频率响应本质上就是系统的单位脉冲响应的离散时间傅里叶变换。

一般情况下，离散时间LTI系统的频率响应是一个复值函数，可用幅度和相位表示为：



式中，**称为系统的幅频响应函数，称为系统的相频响应函数。**

同理，对于系统的输入及输出信号的DTFT，也可以进行如上式所示的变形：



那么，进一步的式xx可以进一步改写为：



所以：



因此，LTI系统的作用就是在幅度和相位上对输入信号进行改变。幅频特性函数决定了系统对于输入信号在不同频率处的幅度的变化，相频特性函数决定了系统导致的输入信号在不同频率处的相位的移动。

此外，需要说明的是，上述讨论针对的对象为系统的输入信号满足绝对可和条件（即信号存在离散时间傅里叶变换），当输入信号为离散周期信号时，LTI系统对输入信号产生的作用同上述内容一致，即分别对幅度和相位产生影响。

## 滤波器的本质：改变输入信号的相位与幅度

“滤波器”这个术语常用来描述一个设备，根据作用于输入端的对象的某些属性进行分辨过滤，以让某部分通过它。

在6.1章节的内容表明线性时不变系统（LTI系统）也同样具有分辨或者滤除输入信号的各种频率成分的作用，这种滤波性质是由系统的频率响应特性*H*(*ejω*)所决定的。线性时不变系统会根据它的频率响应*H*(*ejω*)来改变输入信号的频谱*X*(*ejω*)，产生出频谱为的输出信号，本质上，*H*(*ejω*)对输入的信号中的不同频率成分起着加权函数或者频谱整形函数的作用。任何线性时不变系统都可以被认为是频率整形滤波器，因此“线性时不变（LTI）系统”和“滤波器”这两个术语是同义的，通常可以替换使用。

6.1章节的介绍表明LTI系统的作用是对输入信号的幅度与相位进行了改变，所以，**滤波的本质就是通过系统的幅频特性及相频特性分别改变输入信号的幅度与相位。用公式进行表示：**



幅频响应表示信号通过滤波器后的各频率分量的衰减程度，相频响应表示信号通过滤波器后各频率分量在时间上的延时情况。

## 理想滤波器

1. 理想滤波器的幅频特性

根据滤波器的幅频特性，可以将滤波器分为低通，高通，带通，带阻和全通滤波器。对于理想的滤波器，其通带内的增益为正，即通带内****> 0（通常设置****= 1），阻带内的增益为0，即****= 0。

1. 理想滤波器的相频特性（介绍一下线性相位）

理想滤波器的相频特性满足线性相位的特性。

首先我们明确一下，为滤波器的相频特性，代表由滤波器所产生的输入信号与输出信号之间的相位差，不同频率的相位差代表输入信号中不同频率的成分通过滤波器后会产生时间上的延迟。那么，针对于某一个特定的频率点*ω*0，相位差与时间延迟*τ*0的换算关系为：



那么定义式为系统在该频率点处的相位延迟（phase delay）。

进一步的，定义系统的群延时（group delay）为：



所以，要想保证滤波器的输出不发生畸变，就需要保证对于输入信号中所有的频率成分都有产生相同的相位延迟，那么系统的群延时等于常数，即任何一个频率处的相位延迟都与当前频率无关，要想使得*τ* (*ω*)恒定，系统的幅频特性需具有如下式所示性质：



式所示的幅频特性具有线性特性，所以称该性质为**线性相位**。

## IIR，FIR滤波器

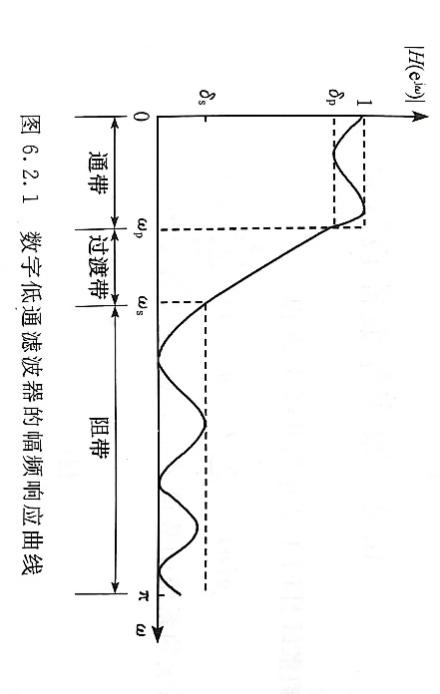
通常，我们所使用的滤波器都为选频滤波器（低通，高通，带通，带阻），那么首先需要满足的就是滤波器的**幅频特性响应具有选频的功能**（即位于通带内的频率成分可以通过，阻带内的频率成分进行衰减）。理想滤波器的介绍中表明：理想滤波器在通带内的幅频响应=1，阻带内的幅频响应=0.

但与此同时，相频特性决定了信号波形本身是否会发生畸变，即使两个滤波器具有相同的幅频特性，但是相频特性不同，最后滤波器输出的结果也会不同。在理想滤波器的介绍中，要想让信号波形不发生畸变，就需要保证系统具有线性相位的条件。

但最优滤波器在实际中并不能实现，在实际滤波器的设计中，需要给定数字滤波器的设计指标（即滤波器的幅频及相频响应分别需要满足什么样的要求）。

* + 1. IIR滤波器

**当滤波器的单位脉冲响应为无限长信号时，滤波器称为无限长单位脉冲响应数字滤波器，即IIR滤波器。**下图给出了一个低通数字滤波器的幅频特性响应函数：



其中，*ωp*代表同代的截止频率，*ωs*代表阻带的截止频率，实际的数字滤波器的通带内的幅频响应不一定是完全平坦的，阻带内也不会完全衰减为0，而且通带与阻带之间总是会存在一个过渡带。在实际的IIR滤波器的设计中，根据实际要求来确定滤波器的技术指标，在满足技术指标的基础上，要保证过渡带尽可能窄。

特别需要注意的是：**IIR滤波器不具有线性相位的相频特性。**因此，如果对滤波器输出波形有严格要求时（比如神经信号处理，语音合成，波形传输等领域），在进行滤波器设计时不能选择IIR滤波器。具体的IIR滤波器的设计通常是以模拟滤波器设计为基础的，这里不做详细介绍。

* + 1. FIR滤波器

当滤波器的单位脉冲响应为有限长信号时，滤波器被称为有限长单位脉冲响应滤波器，即FIR滤波器。FIR滤波器有两个优点，因为其单位脉冲响应有限长，所以FIR滤波器一定为稳定系统，另外，通过进行设计，可以使得FIR滤波器满足线性相位的条件。

在滤波器的实际设计中，其对于输入信号的频谱增益可能并不是总大于等于0，所以在本章节中，进一步引入**幅度特性响应函数（实函数，可正可负）和相位特性响应函数**。即：



**幅度特性响应***H*(*ω*)**为实函数，其即可为正，也可为负**，与之前所介绍的幅频特性响应（实函数，因为是代表模长，仅能为正）不同，同理相位特性响应*θ*(*ω*)也与相频特性响应也不同，但是滤波器的幅度特性响应与相位特性响应对于输入信号的影响同之前所介绍的幅频特性与相频特性响应一致，都是对信号频谱幅度的整形和对相位的移动。后续章节中对于滤波器的的频率响应的讨论就主要以幅度特性和相位特性为对象展开。

此外需要特别说明的是，**并不是所有的FIR滤波器都是线性相位滤波器**，要想保证滤波器具有线性相位，滤波器的单位脉冲响应需满足一定的条件（严格及广义线性相位条件）。

**FIR滤波器满足线性相位的条件：**

滤波器具有线性相位的条件是系统对于不同频率分量产生的相位延迟具有线性特性。

1）严格线性相位条件

对于严格线性相位特性条件，式中的相位特性函数需满足：



通过对滤波器的单位脉冲响应的设计可以满足上述条件；存在I型和II型滤波器满足上述条件。

I型FIR滤波器：滤波器阶数*N*（即系统的单位脉冲响应长度）为**奇数**，*h*(*n*)关于*n* = (*N*-1)/2偶对称。相位延迟为(*N*-1)/2。I型滤波器可以设计出低通，高通，带通和带阻滤波器。

II型FIR滤波器：滤波器阶数*N*（即系统的单位脉冲响应长度）为**偶数**，*h*(*n*)关于*n* = (*N*-1)/2偶对称。相位延迟为(*N*-1)/2。II型滤波器仅能设计出低通和带通滤波器。

2）广义线性相位条件

对于严格线性相位特性条件，式中的相位特性函数需满足：



即相位特性响应存在一个初相*θ*0，每一个频率分量处的相位延迟为*θ*0/*ω-τ*，受到初相的影响，每一个频率分量的相位延迟并不是常数，但是系统的群延时为恒定常数*τ*，所以称为广义线性相位。广义线性相位条件下的滤波器设计不做进一步解释。

## 低通滤波器的设计示例

* + 1. 窗函数设计法

窗函数设计法的原理是：先根据最优滤波器的幅频及相频特性得到一个最优滤波器的频率响应，例如一个最优的低通滤波器的频率响应为：



然后对该频率响应进行离散时间傅里叶逆变换（IDTFT），得到最优滤波器的单位脉冲响应，然后通过对单位脉冲响应进行加窗处理（即截取为长度为*N*的因果序列，并用合适的窗函数进行加权），得到FIR滤波器的单位脉冲响应。加的窗不同会使得最终设计的FIR滤波器具有不同的幅频特性响应（影响幅频特性响应的过渡带宽度等），所以在设计FIR滤波器过程中，可以根据实际要求的技术指标（过渡带宽度，阻带最小衰减等）来决定具体选怎么什么样的窗，以及选择多大的窗长。

* + 1. Matlab设计低通滤波器

本章节以低通线性相位滤波器为例讲解如何使用Matlab来设计FIR I 型滤波器。

Matlab提供了函数fir1()帮助我们进行FIR滤波器的设计。

fir1() 的使用方法为：*h* = fir1(*N*, *ωc*, ‘ftype’, ‘window’)，其中，

函数的输出*h*为设计的滤波器的单位脉冲响应，其长度为*N+*1。*ωc*代表滤波器的截止频率，是对*π*归一化的6 dB数字截止频率。设计6 dB截止频率为*fc* (模拟频率)的滤波器时，根据式，数字截止角频率*ωc*及fir1中参数*ωn*的计算方式见下式：



所以*，*当信号采样频率*fs* = 100 Hz，设计6 dB截止频率为*fc* = 10 Hz的滤波器，那么：*ωn* = 0.2。6 dB代表当*ω =ωc*处，，此时系统的幅频特性响应的幅度。此外，在设计带通和带阻滤波器时，*ωn*是由两个元素组成的向量。‘ftype’为滤波器的种类，包括‘low’，‘high’，‘bandpass’，‘stop’，分别代表设计“低通，高通，带通，及带阻滤波器”。当*ωn*只有单个元素时，ftype’缺省时默认为low，当*ωn*为两个元素组成的向量时，‘ftype’缺省时默认为‘bandpass’。‘window’代表窗函数的类型，缺省时为hamming窗。

在完成滤波器的设计后，使用*y* = filter(*h*, 1, *x*)函数进行滤波处理，*h*代表滤波器的单位脉冲响应，*x*代表滤波器的输入信号，*y*代表滤波后的信号，由于设计的滤波器为线性相位滤波器，所以滤波器的输出信号*y*会产生(*N*-1)/2个点数的延迟。在后续的分析中可以对延迟进行补偿。此外，matlab也提供了零相位移动的函数filtfilt函数，使用方法同filter。

下面以一个具体的示例来展示matlab进行滤波处理的过程。设信号*x*(*n*)为采样频率*fs* = 100 Hz的高斯白噪声，对该白噪声进行截止频率为10 Hz的线性相位低通滤波。白噪声的时域与频域具有如下图所示的特征，其频谱在每个频率处都具有一定的能量。





**代码**

**clear;clc**

**fs = 100;**

**x = randn(10\*fs,1);**

**t = 1:length(x);t=t-1;t=t/fs;**

**f = 1:length(x);f=f-1;f=f/length(x)\*fs;**

**figure**

**subplot(2,1,1);plot(t,x);**

**xlabel('时间/s');**

**title('白噪声时域','FontWeight','bold');**

**subplot(2,1,2);plot(f,abs(fft(x)));**

**xlabel('频率/Hz');xlim([0 50]);**

**title('白噪声频域','FontWeight','bold');**

1. 滤波器的设计

截止频率为10 Hz，信号的采样频率为100 Hz，所以*ωn* = 10/50 = 0.2。对于滤波器的阶数，阶数越大，过渡带越窄，滤波器越接近理想滤波器，但是滤波器的阶数太高会导致滤波处理的计算更耗时，并出现更大的相位移动，本低通滤波器设置为滤波器阶数为501，窗函数选择hamming窗。

对设计好的滤波器进行可视化，matlab提供了函数freqz来求解给定的单位脉冲响应的滤波器的频率响应，并进行可视化，使用方法为freqz(h,1)，*h*即位滤波器的单位脉冲响应，对于上述设计好的低通滤波器，可视化的结果如下图所示：





**代码**

**% 滤波器设计:N = 101, fc = 10Hz, ftype:low, window:hamming window**

**fc = 10;**

**N = 100;**

**wn = fc/(fs/2);**

**h = fir1(N,wn,'low');**

**% 滤波器可视化**

**figure**

**freqz(h,1)**

幅频特性响应表明设计好的低通滤波器对截止频率之外的信息会进行抑制，通带内增益约等于1，相位特性响应表明滤波器具有线性相位。

2. 滤波处理，使用filter对信号进行处理。滤波后的结果如下图所示。



对比输入信号及输出信号的频谱，可见原始的白噪声中高于10Hz的成分被滤波器所滤除。

**代码**

**% 滤波处理**

**y = filter(h,1,x);**

**figure**

**subplot(2,2,1);plot(t,x);xlabel('时间/s');**

**title('输入信号 x：时域','FontWeight','bold');**

**subplot(2,2,3);plot(f,abs(fft(x)));**

**xlabel('频率/Hz');xlim([0 50]);**

**title('输入信号 x：频域','FontWeight','bold');**

**subplot(2,2,2);plot(t,y);xlabel('时间/s');**

**title('输出信号 y：时域','FontWeight','bold');**

**subplot(2,2,4);plot(f,abs(fft(y)));**

**xlabel('频率/Hz');xlim([0 50]);**

**title('输出信号 y：频域','FontWeight','bold');**